DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRÁICAS

Obras que integran el bloque 7 (*Cálculo diferencial*):

Módulo I
Introducción al Cálculo diferencial

Módulo 2
Límite de una función

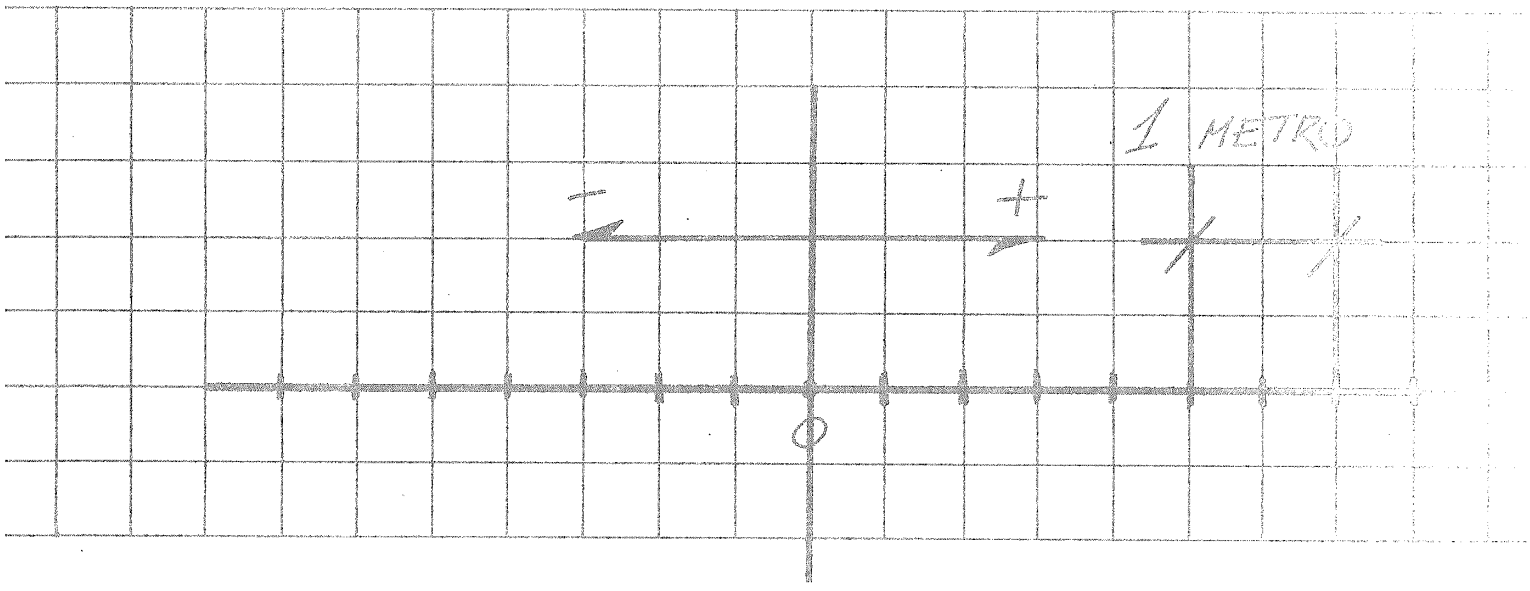
Módulo 3
Continuidad de una función

Módulo 4
Derivación de funciones algebráicas

Módulo 5
Derivación de funciones trascendentes

Módulo 6
Extremos de una función
(máximos y mínimos)

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

Bloque 7

Cálculo diferencial

Módulo 4

DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRÁICAS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

La presentación y disposición en conjunto de
DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, enero 1985
ISBN 968-24-1429-6

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

4.1 La derivada como razón instantánea de cambio 9

4.2 Reglas para la derivación de funciones algebraicas 26

4.3 Derivación de funciones algebraicas 39

4.4 Derivada de una función compuesta 65

4.5 Derivadas sucesivas 74

4.6 Derivación de funciones implícitas 78

4.7 Derivabilidad 86

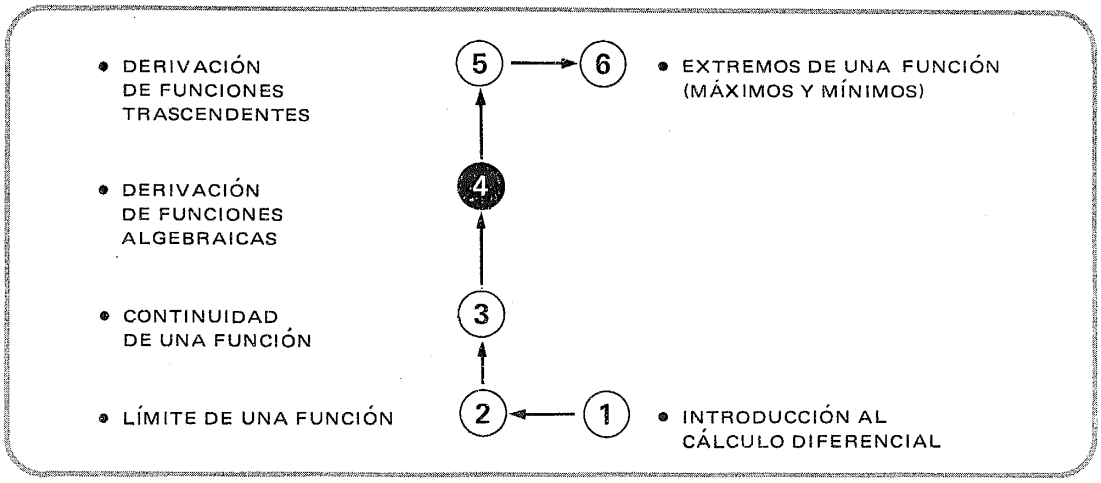
4.8 Velocidad y aceleración instantáneas 97

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 7. Cálculo diferencial

Objetivos: derivar funciones algebraicas o trascendentes, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 7



Módulo 4. Derivación de funciones algebraicas

Objetivos: derivar funciones algebraicas

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Resolución de ecuaciones y desigualdades de primero o segundo grados	2	2, 4, 5, 6
• Relación y función	2	7, 8
• Conceptos geométricos básicos	4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
• Conceptos trigonométricos básicos	5	1
• Conceptos básicos de la geometría analítica	6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
• Límite y continuidad de una función	7	2, 3

4.1

La derivada como razón instantánea de cambio

1

Un cuerpo se mueve en línea recta de acuerdo con la ecuación

$$s = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + \frac{35t}{6} \qquad t \geqslant 0$$

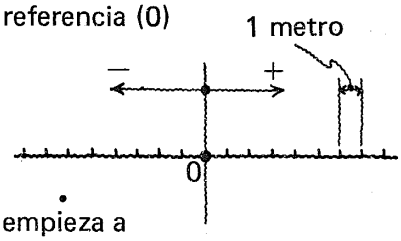
en que:

s = distancia dirigida en metros, que hay del cuerpo a un punto de referencia al cabo de t segundos.

Queremos saber cuál es la velocidad instantánea y la aceleración instantánea del cuerpo al cabo de 5 segundos. Además deseamos conocer en qué momentos el cuerpo se encuentra a mayor distancia del punto de referencia.

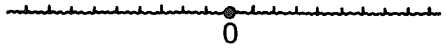
2

Vamos a tratar de entender el enunciado de este problema.
Consideremos un punto de referencia (0) y una línea recta.



Supongamos que el cuerpo empieza a moverse hacia la derecha o hacia la izquierda, de acuerdo con la ecuación de movimiento. Convengamos en conferir signo positivo (+) a las distancias medidas a la derecha de 0, y signo negativo (−) a las distancias consideradas a la izquierda de dicho punto.

3



Ecuación de movimiento: $s = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + \frac{35t}{6}$

En el instante de iniciarse la observación, el cuerpo se encuentra en el punto 0, ya que:

para $t = 0$, $s = \frac{(0)^3}{6} - 2(0)^2 + \frac{35(0)}{6} = 0$

Al cabo de 1 segundo, el cuerpo se encuentra a una distancia de [___] metros a la **izquierda/derecha** del punto 0.

Señalar la posición del móvil en la gráfica.

Para $t = 1$

$s = \frac{(1)^3}{6} - 2(1)^2 + \frac{35(1)}{6}$

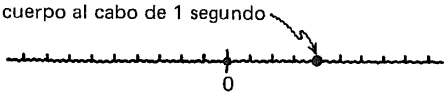
$s = \frac{1}{6} - 2 + \frac{35}{6}$

$s = 6 - 2 = 4$

4 (es decir: + 4) **derecha**

4

Posición del cuerpo al cabo de 1 segundo



Al cabo de 2 segundos, la distancia del cuerpo al punto 0 es igual a [___] metros.
El cuerpo se encuentra a la **derecha/izquierda** del punto 0.

Indicar la nueva posición del móvil en la gráfica.

Para $t = 2$

$s = \frac{(2)^3}{6} - 2(2)^2 + \frac{35(2)}{6}$

$s = \frac{8}{6} - 8 + \frac{70}{6}$

$s = \frac{78}{6} - 8$

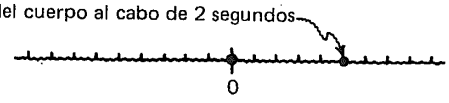
$s = 13 - 8 = 5$

5

derecha

5

Posición del cuerpo al cabo de 2 segundos

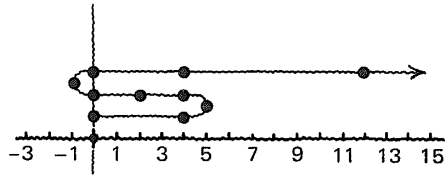


Calculemos, para otros instantes dados, la distancia del cuerpo al punto de referencia.

t	s
0	0
1	4
2	5
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

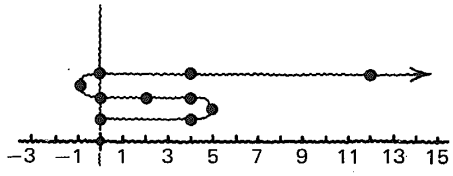
t	s
0	0
1	4
2	5
3	4
4	2
5	0
6	−1
7	0
8	4
9	12
10	25

6



Esta gráfica nos da una idea de la naturaleza del movimiento del cuerpo, si tenemos en cuenta que éste **se desplaza a lo largo de una línea recta.**
Partiendo del punto 0, se desplaza hacia la derecha; al alcanzar una distancia de aproximadamente 5 metros se regresa, atraviesa el punto de referencia y se desplaza ahora hacia la izquierda; cuando alcanza una distancia de 1 metro aproximadamente, cambia nuevamente el sentido de su movimiento, vuelve a pasar por el punto de referencia y se mueve ahora hacia la derecha ¡sin volver a regresar jamás!

7



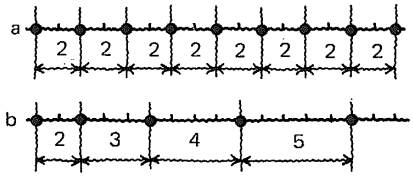
Podemos observar que:

en el primer segundo el desplazamiento del cuerpo es de 4 metros.

en el segundo el desplazamiento es de ____; 1 metro (5 − 4 = 1)

Esto significa que la velocidad del móvil **es/no es** uniforme durante los primeros dos segundos. no es

8

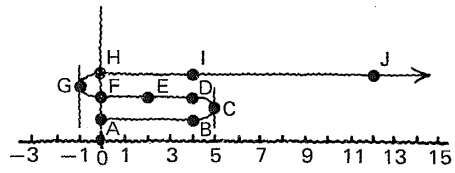


a y **b** son dos móviles que se desplazan hacia la derecha. En la gráfica se muestran las diferentes posiciones que ocupan ambos móviles, para intervalos regulares de tiempo:

la **velocidad de a** es/no es uniforme — es

la **velocidad de b** es/no es uniforme — no es

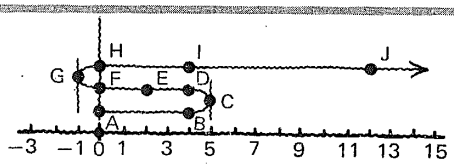
9



La velocidad del móvil
que hemos venido considerando
es/no es uniforme.
Podemos observar que, en este caso,
la velocidad no sólo cambia de magnitud,
sino también de sentido.

no es

10

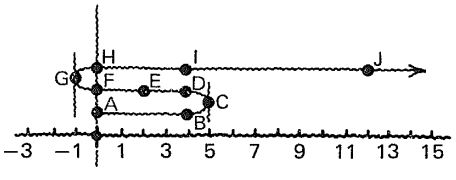


Diremos que:
la **velocidad** es **positiva** cuando el cuerpo se desplaza de izquierda a derecha, y **negativa** en el caso contrario.
Entonces:
al pasar el cuerpo de la posición A a la posición **C** en que se invierte el sentido del movimiento, la velocidad es **positiva/negativa**
Al llegar al punto C la velocidad es nula.
En el recorrido de C a G, la velocidad es **positiva/negativa.**
Al alcanzar el punto G, la velocidad es
A partir de G, la velocidad es **positiva/negativa.**

positiva

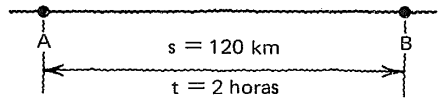
negativa
nula
positiva

11



Podemos ver intuitivamente que la velocidad del móvil está constantemente cambiando de un instante a otro; por ejemplo,
no se anula bruscamente al llegar a la posición C,
sino que disminuye de manera gradual al pasar de A a C.

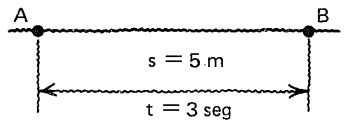
12



Ahora, consideremos un móvil que se desplaza del punto A al punto B con una **velocidad constante.**
Si sabemos que:
la **distancia** recorrida **s** es de 120 km y
el **tiempo t** utilizado en recorrerla es de 2 horas
la **velocidad** es igual a [ ] km/h.

60 (120 km/2 h = 60 km/h)

13

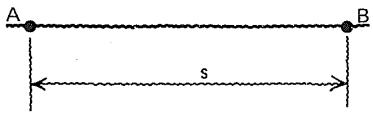


Si la **distancia** recorrida es de 5 m y
el **tiempo** utilizado en recorrerla es de 3 seg.
la **velocidad** es de [ ].

Este tipo de movimiento, en que la velocidad es constante, se llama
movimiento uniforme.

$\frac{5}{3}$ o $1^2/_3$ m/seg.

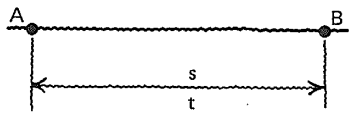
14



En general, cuando el
movimiento es **uniforme**
si el **espacio recorrido** es **s**
y el **tiempo** utilizado en recorrerlo es **t,**
la **velocidad v** es igual a [ ].

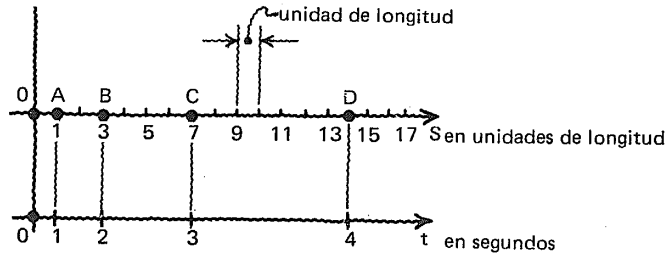
$\frac{s}{t}$ $\left(v = \frac{s}{t}\right)$

15



Ahora, supongamos que el **movimiento no** es **uniforme**, es decir, la velocidad sufre cambios en el trayecto de A a B.
Entonces:
el espacio recorrido sigue siendo igual a s
el tiempo utilizado en recorrerlo sigue siendo t
pero el cociente $\frac{s}{t}$ no representa la velocidad en cualquier instante del recorrido, sino la **velocidad media** o promedio de velocidades para los diferentes instantes.

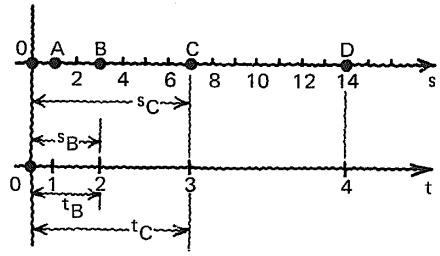
16



Consideremos un móvil que se desplaza a lo largo de recta $\overleftrightarrow{0s}$, de izquierda a derecha y tomemos el punto 0 como referencia. Los puntos señalados con A, B, C y D representan las posiciones del móvil para intervalos sucesivos de 1 segundo.
Tenemos, entonces que:
la **velocidad media** para el tramo BC del recorrido es igual a [ ]

$4\left(\frac{7-3}{1}=4 \text{ unidades de longitud/seg}\right)$

17



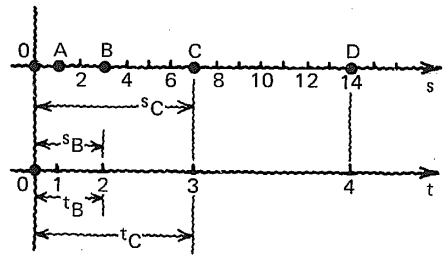
Podemos observar que:

distancia recorrida de B a C = [ ]
tiempo utilizado en recorrerla = [ ]

velocidad media en el ~~trayecto~~ BC = [ ]

$s_C - s_B$
$t_C - t_B$
$\frac{s_C - s_B}{t_C - t_B}$

18



Numéricamente:

$s_C - s_B =$ [ ]

$t_C - t_B =$ [ ]

velocidad media en el trayecto BC = [ ]

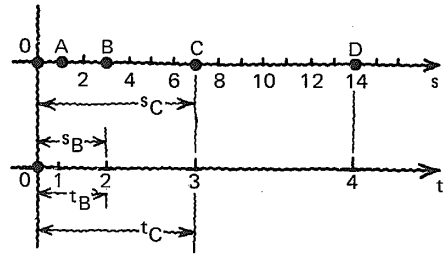
No se indican las unidades

$7 - 3 = 4$

$3 - 2 = 1$

$\frac{4}{1} = 4$

19



Para el tramo BD:

	expresión general	valor numérico
distancia recorrida =	[ ] =	[ ]
tiempo utilizado =	[ ] =	[ ]
velocidad media =	[ ] =	[ ]

$s_D - s_B = 15 - 3 = 12$

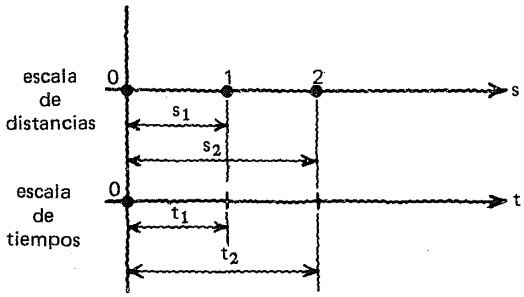
$t_D - t_B = 4 - 2 = 2$

$\frac{s_D - s_B}{t_D - t_B} = \frac{12}{2} = 6$

20

La información proporcionada por la **velocidad media** es suficiente para algunos propósitos prácticos, pero resulta totalmente inadecuada para aquellos casos en que necesitamos tener un conocimiento más preciso de la medida de la **velocidad para cada instante** del recorrido de un móvil. Vamos a tratar de acercarnos a este concepto de **velocidad instantánea.**

21



Tomemos dos instantes cualesquiera en que nuestro móvil toma las posiciones 1 y 2.

La velocidad media para el trayecto 1-2 es igual a [ ]

$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$

22

Si la distancia a un punto de referencia 0 está expresada como una función del tiempo, es decir,

$$s = f(t)$$

como en el caso del móvil que hemos considerado al principio de este módulo, podemos escribir:

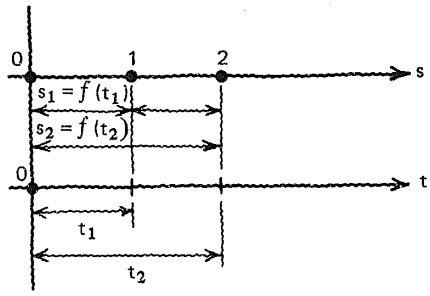
$$s_1 = f(t_1) \qquad s_2 = f(t_2)$$

y la velocidad media en el trayecto 1 — 2 = [ ]

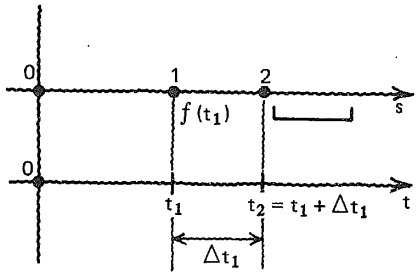
$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$

Véase figura en el cuadro siguiente

23



24



- Llamando Δt_1 al intervalo de tiempo $t_2 - t_1$

  $f(t_2) = f$ [ ]

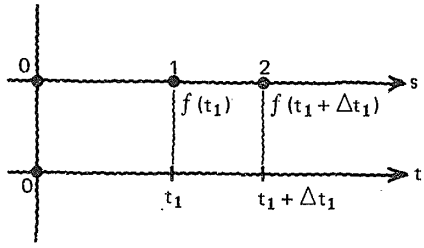
y la velocidad media en el trayecto 1 — 2 = [ ]

- $t_1 + \Delta t_1$
- $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{\Delta t_1}$

o bien:

$$\frac{f(t_1 + \Delta t_1) - f(t_1)}{\Delta t_1}$$

25



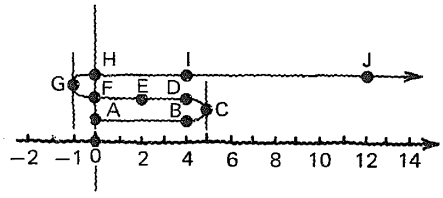
Si el movimiento de un cuerpo está definido por la ecuación

$$s = f(t)$$

la **velocidad media** para un intervalo de tiempo Δt_1 puede calcularse mediante la expresión:

$$v_m = \frac{f(t_1 + \Delta t_1) - f(t_1)}{\Delta t_1}$$

26



Para el móvil considerado al principio:

$$s = f(t) = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + \frac{35t}{6}$$

queremos calcular la velocidad media para el intervalo de tiempo comprendido entre los segundos 8° y 9°, en que el cuerpo se desplaza de la posición I a la posición J.

Véase cuadro siguiente.

27

Utilizaremos la expresión: $v_m = \dfrac{f(t_1 + \Delta t_1) - f(t_1)}{\Delta t_1}$

$$s = f(t) = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + \frac{35t}{6}$$

t_1 = ____

Δt_1 = ____

$f(t_1)$ = ____

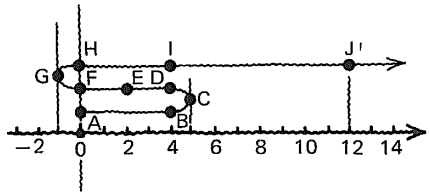
$f(t_1 + \Delta t_1)$ = ____

v_m = ____ ____

- 8
- 1 $\quad (9 - 8 = 1)$
- $f(8) = \dfrac{(8)^3}{6} 2(8)^2 + \dfrac{35(8)}{6} = 4$
- $f(8 + 1) = f(9)$

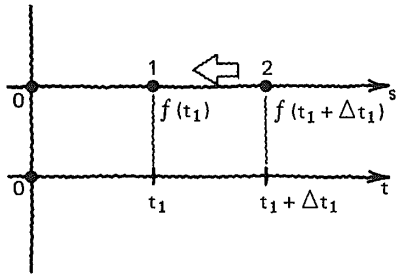
  $= \dfrac{(9)^3}{6} - 2(9)^2 + \dfrac{35(9)}{6} = 12$
- $\dfrac{12 - 4}{1} = 8$

28



Podemos verificar por medio de la gráfica el resultado obtenido.

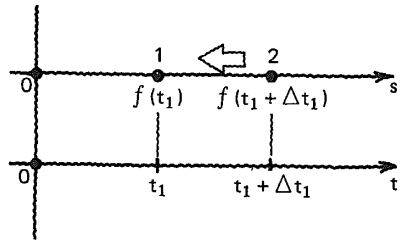
29



Ahora bien,
queremos conocer la **velocidad instantánea** para t = 1.
Consideremos fijo el punto 1 y hagamos que el punto 2 se acerque más y más a él; en estas condiciones, tenemos que:

$\Delta t_1 \to 0$

30



Definiremos entonces, la **velocidad instantánea** para t_1, así:

$$v_{(1)} = \lim_{\Delta t_1 \to 0} \frac{f(t_1 + \Delta t_1) - f(t_1)}{\Delta t_1}$$

Y para cualquier instante (t):

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

31

Esta expresión para la **velocidad instantánea** al cabo del tiempo **t**

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

no nos resulta del todo desconocida.
Recordemos que

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

representa

la pendiente de la curva $y = f(x)$, en un punto cualquiera de abscisa **x**

32

Considerando

$$s = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + \frac{35t}{6}$$

como
la ecuación definitoria o
regla de correspondencia
de una función,
podemos trazar su **gráfica cartesiana**
para el dominio

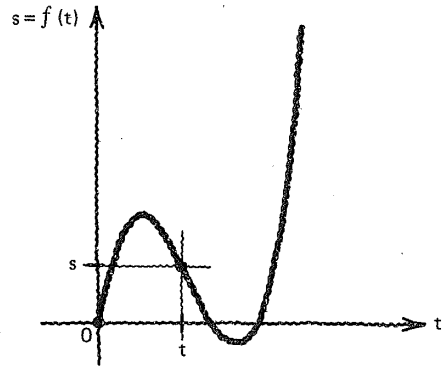
$$\{t \mid t \in \mathbb{R} \wedge t \geq 0\}$$

con ayuda de la tabla que
habíamos elaborado.

t	s
0	0
1	4
2	5
3	4
4	2
5	0
6	−1
7	0
8	4
9	12
10	25

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Observemos con atención esta gráfica que nos da la distancia dirigida del cuerpo en movimiento, al punto de referencia 0, al cabo de t segundos.



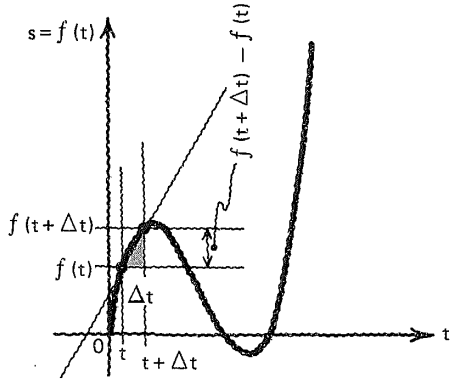
33

Mucha atención.

La expresión

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

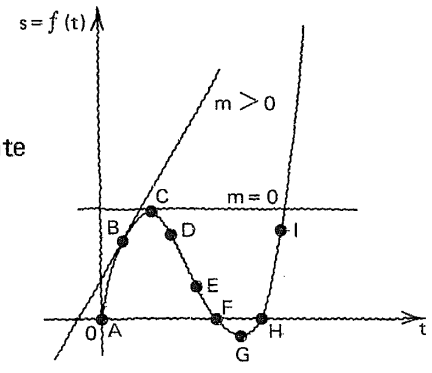
representa la **pendiente** de la recta tangente a la curva en un punto de abscisa t, y también la **velocidad instantánea** del móvil al cabo de t segundos.



34

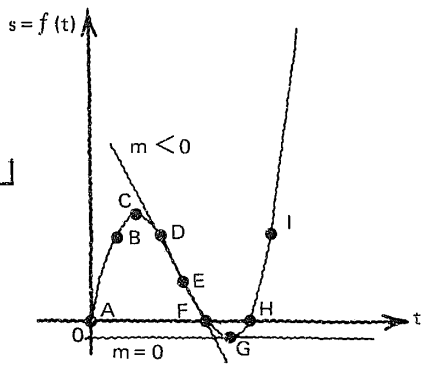
Con ayuda de esta gráfica, podemos observar que:

1. la velocidad es positiva para cualquier instante entre 0 y aproximadamente 2 segundos, y que decrece gradualmente a medida que el móvil se acerca a la posición C, en que la velocidad se anula al cambiar el sentido del movimiento.



35

2. Para cualquier instante entre 2 y 6 segundos aproximadamente, al pasar el móvil de la posición C a la posición G la velocidad es [_____]



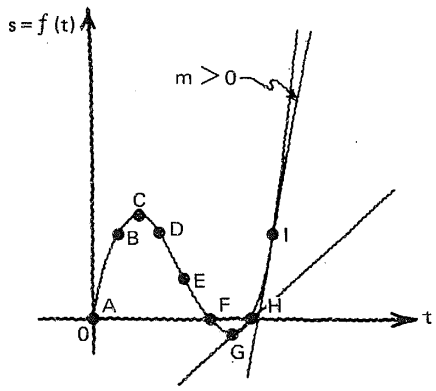
Al llegar a la posición G en que el movimiento cambia de sentido, la velocidad es [_____]

negativa

nula

36

3. Para cualquier instante, a partir de 6 segundos, aproximadamente la velocidad es [_____] y se incrementa, primero rápidamente y luego con lentitud.



positiva

37

La similitud entre las expresiones:

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto de abscisa x,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

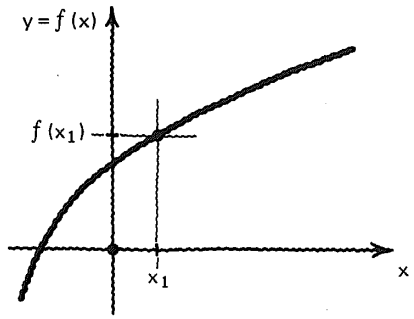
y para la velocidad instantánea al cabo de t unidades de tiempo de un cuerpo que se mueve en línea recta de acuerdo con la ecuación $s = f(t)$ no es casual, pues ambas son casos particulares del concepto más general de **razón instantánea de cambio**.

38

En general, si se tienen dos variables (x e y) relacionadas por la ecuación

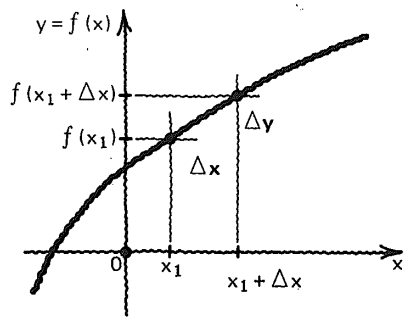
$y = f(x)$

vemos que:
a un valor de la variable x igual a x_1 corresponde un valor de la variable y igual a $f(x_1)$.



39

Si incrementamos x_1 en una cantidad igual a Δx y_1 sufre un incremento igual a Δy.
Podemos observar que este incremento Δy es igual a



$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

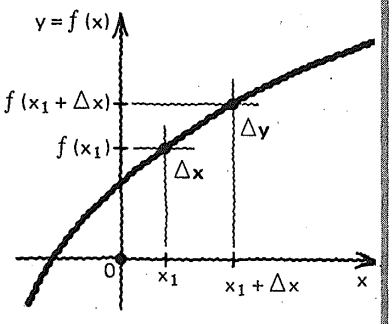
40

La razón promedio de cambio de la variable y por unidad de cambio de la variable x, puede expresarse así:

cambio experimentado por y_1

cuando $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

x_1 experimenta un cambio igual a



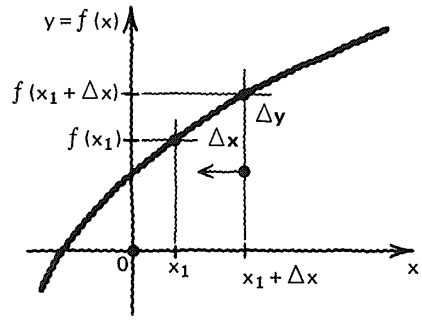
$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

41

La **razón instantánea de cambio de la variable y por unidad de cambio de la variable x,** cuando

$x = x_1$ es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = [\quad\quad]$$



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

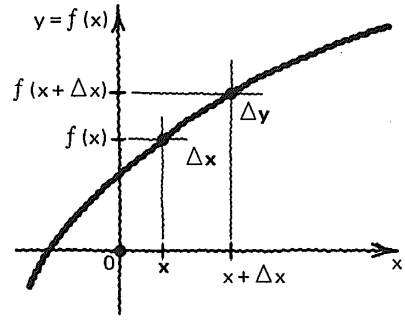
42

La **razón instantánea de cambio** de la variable **y** por unidad de cambio de la variable x_1 **en x** puede ser expresada así

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

o así

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



43

La **velocidad instantánea***, en t, de un cuerpo que se mueve en línea recta de acuerdo con la ecuación

$$s = f(t),$$

es el cambio que experimenta la distancia dirigida **s** a un punto de referencia 0, por unidad de cambio del tiempo **t**, y puede expresarse así:

[_____]

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

o

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

* Que es un ejemplo de razón instantánea de cambio, en este caso de la distancia con respecto al tiempo.

44

Ahora, atención.

Si la **aceleración instantánea,** en t,
de un cuerpo que se mueve en línea recta
de acuerdo con la ecuación

$$v = g(t)$$

es
el cambio que experimenta la velocidad **v**,
por unidad de cambio del tiempo **t**,
la expresaríamos así:

$$a = \boxed{\qquad} = \boxed{\qquad}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}$$

7.4.1.1

Práctica adicional.
Proporcionar ejemplos de
razón instantánea de cambio
de una variable **y**
por unidad de cambio de otra
variable **x**,
relacionadas ambas
por una ecuación de la forma

$y = f(x)$,

si se considera necesario.

45

Vamos a dar el nombre de DERIVADA
a un límite de alguna de estas formas:

- $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

- $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

- $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

y la denotaremos con alguno de los siguientes signos:

- $f'(x)$
- y'
- $D_x y$
- $\dfrac{dy}{dx}$

46

Estudiar con atención

Si $y = f(x)$

podemos escribir cualquiera de las siguientes expresiones para lo que llamaremos la **derivada de y con respecto a x**

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f'(x) \\ \bullet\ y' \\ \bullet\ D_x y \\ \bullet\ \dfrac{dy}{dx} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \\ \bullet\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ \bullet\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \end{array}\right.$$

47

A las dos variables involucradas en la expresión

$y = f(x)$

les llamaremos:

variable dependiente ——— y

variable independiente ——— x

7.4.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar* con sus propias palabras y valiéndose de los auxiliares gráficos que considere necesarios, el concepto de derivada como razón instantánea de cambio;
- *proporcionar* ejemplos de razón instantánea de cambio.

4.2

Reglas para la derivación de funciones algebraicas

48

En un módulo anterior hemos aprendido a evaluar expresiones de la forma

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

por lo que podemos llamar:

procedimiento de los 4 pasos.

49

Un ejemplo, a manera de recordatorio.
Dada la función

$$y = f(x) = 3x + 4$$

se requiere calcular

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En otras palabras:
queremos encontrar la **derivada de $y = 3x + 4$ con respecto a x,** o simbólicamente:

$$f'(x) = \frac{d(3x + 4)}{dx} = ?$$

50

Función dada:

$$f(x) = 3x + 4$$

Paso 1. $f(x + \Delta x) =$ [ ]

Paso 2. $f(x + \Delta x) - f(x) =$ [ ]

Paso 3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ [ ]

Expresión simplificada [ ]

Paso 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ [ ] $=$ [ ]

$3(x + \Delta x) + 4$

$3(x + \Delta x) + 4 - (3x + 4)$

$\dfrac{3(x + \Delta x) + 4 - (3x + 4)}{\Delta x}$

$\dfrac{3x + 3\Delta x + 4 - 3x - 4}{\Delta x}$

3

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} 3 = \mathbf{3}$

51

Decimos que:

la **derivada de y con respecto a x**
para la función definida por

$$y = f(x) = 3x + 4$$

es igual a 3.
Simbólicamente:

$$f'(x) = 3$$

ó $\quad y' = 3$

ó $\quad D_x y = 3$

ó $\quad \dfrac{dy}{dx} = 3$

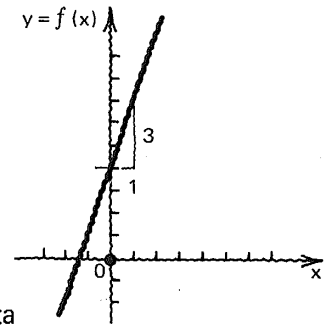
52

Interpretación geométrica.
Sabemos que la ecuación $y = 3x + 4$ corresponde a una función que hemos llamado [ ]

su gráfica es una [ ]

$$f'(x) = 3 \text{ o } \frac{dy}{dx} = 3$$

representa la **pendiente** de la recta en un punto de abscisa x.
En efecto,
sabemos que la pendiente de una recta es constante para todos sus puntos.
Para esta recta particular, la pendiente $m = 3$.



lineal

recta

53

Un ejemplo más: $y = f(x) = x^2 - 2$

Se requiere determinar $y' = f'(x) = \dfrac{d(x^2 - 2)}{dx}$

Paso 1. [ ] = [ ]

Paso 2. [ ] = [ ]

Paso 3. [ ] = [ ]

Expresión simplificada [ ]

Paso 4. [ ] = [ ] = [ ]

- $f(x + \Delta x) = (x+\Delta x)^2 - 2$
- $f(x + \Delta x) - f(x) = (x +\Delta x)^2 - 2 - (x^2 - 2)$
- $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{(x + \Delta x)^2 - 2 - (x^2 - 2)}{\Delta x}$

$2x + \Delta x$

$\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x$

54

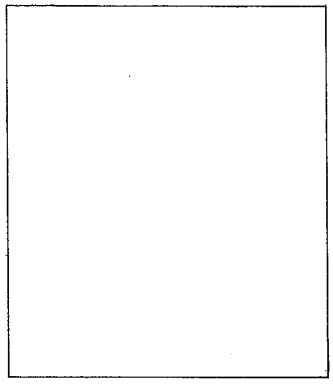
$y = f(x) = x^2 - 2$

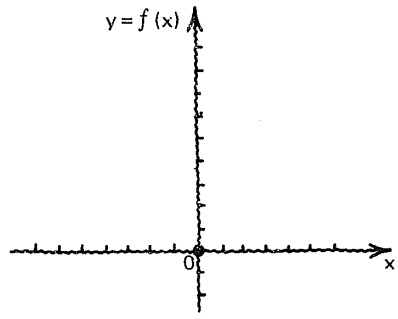
$y' = f'(x) = \dfrac{d(x^2 - 2)}{dx} =$ [ ]

$2x$

55

Interpretación geométrica:





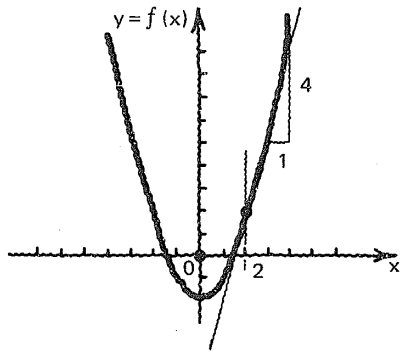
Respuesta
en el
cuadro siguiente

Estudiar con atención.

$f'(x) = 2x$

ó $y' = 2x$

ó $\frac{dy}{dx} = 2x$



representa la pendiente de la recta tangente a la parábola

$y = x^2 - 2$

en un punto de abscisa x.
Si, por ejemplo, $x = 2$

$f'(2) = 2(2) = 4.$

56

Observamos que:

si **f** es una función definida por $y = f(x)$

entonces

la **derivada de la función** f

es otra función f' definida por

$y' = f'(x)$

57

En el ejemplo anterior:

f es una función definida por

$y = f(x) = x^2 - 2$

la derivada de f

es la función f' definida por

$y' = f'(x) = 2x$

58

El cálculo de la derivada de una función por el procedimiento de los 4 pasos, puede resultar demasiado laborioso, sobre todo cuando la función es de expresión complicada.

Aplicaremos el procedimiento estudiado a algunas formas algebraicas típicas para deducir reglas de rápida aplicación.

59

Para el estudio de los cuadros siguientes, el alumno debe tener a la mano una lista de los **teoremas de límites** estudiados en el módulo 6.2.

60

Derivada de una función constante.

Sea f la función definida por: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ en que **c** es una constante.

1. $f(x + \Delta x) = \boxed{\quad}$

2. $f(x + \Delta x) - f(x) = \boxed{\quad}$

3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \boxed{\quad}$

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \boxed{\quad}\ \boxed{\quad}$

$$\frac{\mathbf{d(c)}}{\mathbf{dx}} = \boxed{\quad}$$

La derivada de una constante es igual a $\boxed{\quad}$

c

$c - c = 0$

$\dfrac{0}{\Delta x} \fallingdotseq 0$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

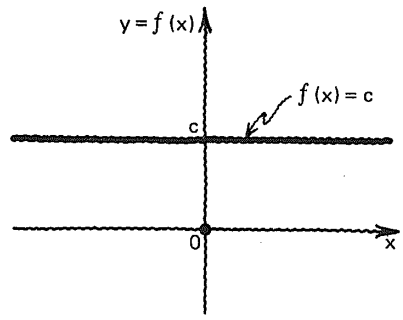
0

0

61

$$\frac{d(c)}{dx} = 0$$

La pendiente de una recta paralela al eje ox es igual a cero.



62

Derivada de una función identidad.

$$f(x) = x$$

1. [ ] = [ ]
2. [ ] = [ ]
3. [ ] = [ ]

Expresión simplificada [ ]

4. [ ] = [ ] = [ ]

$$\frac{d(x)}{dx} = [\ ]$$

$f(x + \Delta x) = x + \Delta x$

$f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x}$$

1

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

1

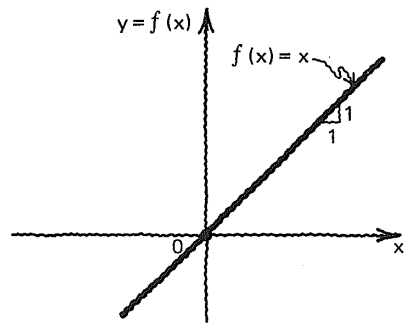
63

$$\frac{d(x)}{dx} = 1$$

La pendiente de la recta

$y = x$

es igual a 1.



64

Derivada del producto de una constante y una función.

$f(x) = c \cdot u$ siendo $u = g(x)$

1. [ ] = [ ]
2. [ ] = [ ]
3. [ ] = [ ]

Expresión simplificada [ ]

4. [ ] = [ ] = [ ]

● $\dfrac{d(cu)}{dx}$ = [ ]

Estudiar con atención

$f(x + \Delta x) = c(u + \Delta u)$

$f(x + \Delta x) - f(x) = c(u + \Delta u) - cu$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c(u + \Delta u) - cu}{\Delta x}$$

$$\frac{cu + c\Delta u - cu}{\Delta x}$$

$$c \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

● $c \dfrac{d(u)}{dx}$

65

Derivada de una suma de funciones

$f(x) = u + v - w$ en que: $\begin{cases} u = g(x) \\ v = h(x) \\ w = j(x) \end{cases}$

1. [ ] = [ ]
2. [ ] = [ ]
3. [ ] = [ ]

Expresión simplificada [ ]

4. [ ] = [ ] = [ ]

$\dfrac{d(u + v - w)}{dx}$ = [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$$f(x + \Delta x) = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w)$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w) - (u + v - w)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w) - (u + v - w)}{\Delta x}$$

$$= \frac{u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w - u - v + w}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta u + \Delta v - \Delta w}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v - \Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{d(u)}{dx} + \frac{d(v)}{dx} - \frac{d(w)}{dx}$$

$$\frac{d(u)}{dx} + \frac{d(v)}{dx} - \frac{d(w)}{dx}$$

66

Derivada de un producto de dos funciones.

$f(x) = u \cdot v$ en que $\begin{cases} u = g(x) \\ v = h(x) \end{cases}$

1. [ ] = [ ]
2. [ ] = [ ]
3. [ ] = [ ]

Expresión simplificada [ ]

$f(x + \Delta x) = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$

$f(x + \Delta x) - f(x)$
$= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v}{\Delta x}$$

$$\frac{uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - uv}{\Delta x}$$

$$u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

67

Atención.

4. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) + \left(\lim_{\Delta x \to 0} v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

Véase cuadro siguiente.

68

$\lim_{\Delta x \to 0} u =$ [ ]

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} =$ [ ]

$\lim_{\Delta x \to 0} v =$ [ ]

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$ [ ]

$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u =$ [ ]

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$ [ ]

u

$\frac{dv}{dx}$

v

$\frac{du}{dx}$

0

$\frac{du}{dx}$

69

Entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$u \frac{d(v)}{dx} + v \frac{d(u)}{dx}$$

$$u \cdot \frac{d(v)}{dx} + v \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

70

Derivada de un cociente de funciones.

$$f(x) = \frac{u}{v} \qquad \text{en que: } \begin{cases} u = g(x) \\ v = h(x) \end{cases}$$

1. $\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$

2. $\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$

Expresión simplificada $\boxed{\qquad\qquad}$

$$f(x + \Delta x) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{(v + \Delta v)v}$$

$$= \frac{uv - v\Delta u - uv - u\Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

$$\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}$$

71

2. $f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta u}$

3. $\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{v \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta u}$$

72

4. [ ] = [ ] = [ ]

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = [\quad]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta u}$$

$$\frac{v\frac{d(u)}{dx} - u\frac{d(v)}{dx}}{v^2}$$

73

Derivada de una función potencia.

$$f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

1. [ ] = [ ]

2. [ ] = [ ]

3. [ ] = [ ]

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

74

3. $$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Para simplificar esta expresión es necesario recordar que, de acuerdo con Newton, para $n \in \mathbb{Z}^+$

$$(x + \Delta x)^n = [\quad]$$

$$x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}(\Delta x)^2 \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n$$

75

Entonces:

$$\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}\Delta x + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}$$

76

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $\underline{\qquad\qquad\qquad}$

$\downarrow$

$\underline{\qquad\qquad\qquad}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}\Delta x + \ldots + n\,x(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right]$$

nx^{n-1}

77

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

Aunque esta expresión ha sido obtenida para

$n \in \mathbb{Z}^+$

puede ser aplicada para toda $n \in \mathcal{R}$.

78

Resumen 1. Derivadas de funciones algebraicas.

D1. $\dfrac{d(c)}{dx} = 0$

D2. $\dfrac{d(x)}{dx} = 1$

D3. $\dfrac{d(c \cdot u)}{dx} = c \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$

D4. $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$

D5. $\dfrac{d(cx^n)}{dx} = cnx^{n-1}$

D6. $\dfrac{d(u + v - w)}{dx} = \dfrac{d(u)}{dx} + \dfrac{d(v)}{dx} - \dfrac{d(w)}{dx}$

D7. $\dfrac{d(u \cdot v)}{dx} = u \cdot \dfrac{d(v)}{dx} + v \cdot \dfrac{d(u)}{dx}$

D8. $\dfrac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \dfrac{v\dfrac{d(u)}{dx} - u\dfrac{d(v)}{dx}}{v^2}$

u, v, w son funciones de x.

7.4.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- Obtener las siguientes reglas para la derivación de funciones algebraicas.

D1. $$\frac{d(c)}{dx} = 0$$

D2. $$\frac{d(x)}{dx} = 1$$

D3. $$\frac{d[cu]}{dx} = c\frac{d(u)}{dx}$$

D4. $$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

D5. $$\frac{d(cx^n)}{dx} = cnx^{n-1}$$

D6. $$\frac{d(u + v - w)}{dx} = \frac{d(u)}{dx} + \frac{d(v)}{dx} - \frac{d(w)}{dx}$$

D7. $$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \cdot \frac{d(v)}{dx} + v\frac{d(u)}{dx}$$

D8. $$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{d(u)}{dx} - u\frac{d(v)}{dx}}{v^2}$$

u, v, w son funciones de x

4.3

Derivación de funciones algebraicas

79

$f(x) = 5$

$f'(x) =$ [_____]

0 por D1

80

$f(x) = -7$

$f'(x) =$ [_____]

0 por D1

81

$f(x) = 0$

$f'(x) =$ [ ]

0 por D1

82

$f(x) = k$

$f'(x) =$ [ ]

k es una constante.

0 por D1

83

$f(x) = x$

$f'(x) =$ [ ]

1 por D2

84

$f(t) = t$

$f'(t) =$ [ ]

1 por D2

85

$f(x) = t$

$f'(x) =$ [ ]

por D1
0 si t es una constante

86

$f(x) = 3x$

$f'(x) =$ [ ]
↓
[ ]

$3\frac{d(x)}{dx}$ por D3

$3 \cdot 1 = 3$ por D2

87

$f(t) = -17t$

$f'(t) =$ [ ]

$-17 \cdot \frac{d(t)}{dt}$ por D3

$-17 \cdot 1 = -17$ por D2

88

$f(\theta) = a\theta$ a es una constante

$f'(\theta) =$ [ ]

$a \cdot \frac{d(\theta)}{d\theta}$ por D3

$a \cdot 1 = a$ por D2

89

$s = 9.2t$

$s' =$ [ ]

9.2 por D2 y D3

90

$r = -31.8\theta$

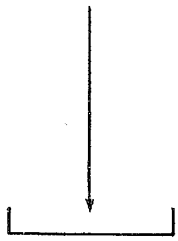
$\frac{d(r)}{d\theta} =$ ____

-31.8 por D2 y D3

91

$y = 3x + 4$

$y' =$ ____



$\frac{d(3x)}{dx} + \frac{d(4)}{dx}$ por D6

$3 \cdot \frac{d(x)}{dx} + 0$ por D3 y D1

$3 \cdot 1 + 0$ por D2

3

92

$s = -5t - 6$

$\frac{d(s)}{dt} =$ ____

-5 por D1, D2, D3, D6

93

$r = \frac{3}{4}\theta + \frac{7}{8}$

$\frac{d(r)}{d\theta} =$ [ ]

$\frac{3}{4}$ por D1, D2, D3, D6

94

$f(x) = 8 - 3t$

$f'(x) =$ [ ]

-3 por D1, D2, D3 y D6

95

$g(t) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}\,t$

$g'(t) =$ [ ]

$\sqrt{3}$ por D1, D2, D3 y D6

96

En general,
para una **función lineal.**

$f(x) = mx + b$

$f'(x) =$ [ ]

m por D1, D2, D3 y D6

7.4.3.1

Práctica adicional
de
derivación de una función lineal
definida por
$f(x) = mx + b$ con $m, b \in$
si se considera necesario.

97

$f(x) = x^2$

$f'(x) =$ [ ]

2x por D4

98

$g(x) = x^3$

$g'(x) =$ [ ]

$3x^2$ por D4

99

$h(x) = x^4$

$h'(x) =$ [ ]

$4x^3$ por D4

100

$j(t) = t^5$

$j'(t) =$ [ ]

$5t^4$ por D4

101

$k(\theta) = \theta$

por D4 para n = 1

$k'(\theta) =$ [ ]

$1 \cdot \theta^{1-1} = 1 \cdot \theta^0$

$= 1 \cdot 1 = 1$

resultado que puede obtenerse por D2

102

$f(x) = x^0$

por D4 para n = 0

$f'(x) =$ [ ]

$0 \cdot x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0$

resultado que puede obtenerse por D1, puesto que $x^0 = 1$ y $\frac{d(1)}{dx} = 0$

103

$f(x) = x^{-1}$

por D4 para n = −1

$f'(x) =$ [ ]

$-1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2}$

$= -\frac{1}{x^2}$

104

$f(x) = x^{-2}$

$f'(x) =$ _____

$-2x^{-3}$ por D4

$\left(\text{ó} -\frac{2}{x^3}\right)$

105

$f(w) = w^{-3}$

$f'(w) =$ _____

$-3w^{-4}$ $\left(\text{ó} -\frac{3}{w^4}\right)$

106

$f(x) = 3x^2$

$f'(x) =$ _____

$3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 6x$ por D5

107

$f(x) = -5x^3$

$f'(x) =$ [ ]

$-15x^2$ por D5

108

$f(x) = -10x^{-4}$

$f'(x) =$ [ ]

$40x^{-5}$ por D5

$\left(\text{ó } \frac{40}{x^5}\right)$

7.4.3.2

Práctica adicional
de
derivación de funciones
de la forma
$f(x) = cx^n$ con $n \in \mathbb{Z}$
si se considera necesario.

109

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Se requiere determinar $f'(x)$

Sabemos que $\frac{1}{x^n} =$ [ ]

por lo tanto, podemos hacer la siguiente transformación de la ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} =$$ [ ]

Entonces:

$$f'(x) =$$ [ ] $=$ [ ]

Expresión racional ←

x^{-n}

x^{-2}

$-2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

110

$$f(x) = \frac{1}{x^3} =$$ [ ]

$$f'(x) =$$ [ ] $=$ [ ]

x^{-3}

$-3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

111

$$f(x) = \frac{1}{x} =$$ [ ]

$$f'(x) =$$ [ ] $=$ [ ]

x^{-1}

$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

112

$f(x) = \frac{3}{x^2} = $ [ ]

$f'(x) = $ [ ] $= $ [ ]

$3x^{-2}$

$-6x^{-3} = -\frac{6}{x^3}$

113

$f(x) = -\frac{5}{x^4} = $ [ ]

$f'(x) = $ [ ] $= $ [ ]

$-5x^{-4}$

$20x^{-5} = \frac{20}{x^5}$

114

$f(x) = \frac{3}{4x^2} = $ [ ]

$f'(x) = $ [ ] $= $ [ ]

$\frac{3x^{-2}}{4}$

$\frac{-6x^{-3}}{4} = -\frac{6}{4x^3} = -\frac{3}{2x^3}$

115

$f(x) = \frac{a}{bx^4} =$ [ ]

$f'(x) =$ [ ] $=$ [ ]

$\frac{ax^{-4}}{b}$

$\frac{-4ax^{-5}}{b} = -\frac{4a}{bx^5}$

7.4.3.3

Práctica adicional
de
derivación de funciones
de la forma $f(x) = \frac{a}{bx^n}$
con $n \in \mathbb{Z}^+$
si se considera necesario.

116

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

Por D4
para $n = \frac{1}{2}$ $f'(x) =$ [ ]

En forma de fracción [ ]

Estudiar con atención

$\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}$

$\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}$

$\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

117

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) =$ [ ]

En forma de fracción [ ]

$\frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1}$

$\frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}}$

$\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}$

$\frac{1}{3x^{2/3}}$

1

$f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

$f'(x) =$ [ ]

En forma de fracción [ ]

$\frac{3}{4} \cdot x^{\frac{3}{4}-1}$

$\frac{3x^{\frac{3}{4}-\frac{4}{4}}}{4}$

$\frac{3x^{-\frac{1}{4}}}{4}$

$\frac{3}{4x^{1/4}}$

119

$f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) =$ [ ]

En forma de fracción [ ]

$-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}$

$-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-\frac{3}{3}}$

$-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

$-\frac{2}{3x^{5/3}}$

120

$f(x) = 4x^{-\frac{3}{5}}$

$f'(x) =$ [ ]

En forma de fracción [ ]

$-\frac{3}{5} \cdot 4x^{-\frac{3}{5}-1}$

$-\frac{12}{5}x^{-\frac{3}{5}-\frac{5}{5}}$

$-\frac{12}{5}x^{-\frac{8}{5}}$

$-\frac{12}{5x^{8/5}}$

121

$f(x) = -\frac{3x^{-\frac{1}{4}}}{5}$

$f'(x) =$ [ ]

En forma de fracción [ ]

$\frac{-3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) x^{-\frac{1}{4}-1}}{5}$

$\frac{3}{20x^{5/4}}$

7.4.3.4

Práctica adicional
de
derivación de funciones
de la forma
$f(x) = cx^n$
con $c \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{Q}$
si se considera necesario.

122

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Se requiere determinar $f'(x)$

Recordemos que: es posible expresar en forma exponencial:

$\sqrt[q]{x^p}$ = [ ]

por lo tanto, efectuamos la transformación:

$f(x) = \sqrt{x}$ = [ ]

y $f'(x)$ = [ ] [ ]

Expresión con radical [ ]

Estudiar con atención.

$x^{\frac{p}{q}}$

$x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{1/2}}$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

123

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ = [ ]

$f'(x)$ = [ ]

[ ]

Expresión con radical [ ]

$x^{\frac{1}{3}}$

$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$\frac{1}{3x^{2/3}}$

$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

124

$f(x) = \sqrt{x^3}$ = [ ]

$f'(x)$ = [ ]

Expresión con radical [ ]

$x^{\frac{3}{2}}$

$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{3\sqrt{x}}{2}$

125

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} =$ [ ]

$f'(x) =$ [ ]

Expresión con radical [ ]

$x^{\frac{2}{3}}$

$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$\frac{2}{3x^{1/3}}$

$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

126

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} =$ [ ] $=$ [ ]

Como fracción, pero con el denominador en forma exponencial.

Como expresión exponencial con exponente negativo.

$f'(x) =$

Expresión con radical [ ]

Estudiar con atención

$\frac{1}{x^{1/2}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$-\frac{1}{2}x^{-3/2}$

$-\frac{1}{2x^{3/2}}$

$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

127

$f(x) = \frac{3}{5\sqrt[3]{x^2}} =$ [ ] $=$ [ ]

$f'(x) =$ [ ]

Expresión con radical [ ]

$\frac{3}{5x^{2/3}} = \frac{3x^{-\frac{2}{3}}}{5}$

$\frac{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-5/3}}{5}$

$-\frac{2}{5x^{5/3}}$

$-\frac{2}{5\sqrt[3]{x^5}}$

7.4.3.5

Práctica adicional
de
derivación de funciones
de las formas:

$f(x) = c\sqrt[q]{x^p}$ o $f(x) = \dfrac{c}{\sqrt[q]{x^p}}$

con $c \in \mathbb{Q}$ y $p, q \in \mathbb{Z}^+$
si se considera necesario.

128

$f(x) = x^2 + 3x - 6$

$f'(x) =$ [ ] por D6

[ ]

$\dfrac{d(x^2)}{dx} + \dfrac{d(3x)}{dx} - \dfrac{d(6)}{dx}$

$2x + 3$

por D1, D2, D3, D4

129

$f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 8x - 10$

$f'(x) =$ [ ]

$15x^2 - 12x + 8$

130

$$f(t) = \frac{3}{t^3} - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t} + 1$$

Transformando la expresión del segundo miembro para que pueda ser aplicada la fórmula D5.

$f(t) =$ [ ]

$f'(t) =$ [ ]

↓

[ ]

$3t^{-3} - 2t^{-2} + t^{-1} + 1$

$3(-3)t^{-4} - 2(-2)t^{-3} + (-1)t^{-2}$

$-9t^{-4} + 4t^{-3} - t^{-2}$

$-\frac{9}{t^4} + \frac{4}{t^3} - \frac{1}{t^2}$

131

$f(\theta) = \theta^{\frac{3}{4}} + \theta^{\frac{1}{2}} + \theta$

$f'(\theta) =$ [ ]

↓

Expresar con exponentes positivos [ ]

$\frac{3}{4}\theta^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\theta^{-\frac{1}{2}} + 1$

$\frac{3}{4\theta^{1/4}} + \frac{1}{2\theta^{1/2}} + 1$

132

$g(x) = \sqrt{x} + x - 1$

Transformando la expresión del segundo miembro

$g(x) =$ [ ]

$g'(x) =$ [ ]

↓

Expresión con radicales [ ]

$x^{\frac{1}{2}} + x - 1$

$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1$

$\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + 1$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$

133

$h(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$

$h(t) =$ [ ]

$h'(t) =$ [ ]

↓

Expresión simplificada [ ]

$t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$

$\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{t^3}}$

o bien

$\frac{t-1}{2t\sqrt{t}}$

7.4.3.6

Práctica adicional,
si se considera necesario.

134

$f(x) = x^2(x + 4)$

Por D7:

$f'(x) =$ [ ]

↓

[ ]

- $x^2 \cdot \frac{d(x+4)}{dx}$

$+ (x + 4) \cdot \frac{d(x^2)}{dx}$

$x^2 \cdot 1 + (x + 4) \cdot 2x$

$x^2 + 2x^2 + 8x$

- $3x^2 + 8x$

Puede obtenerse el mismo resultado, efectuando el producto indicado en el segundo miembro de $f(x) = x^2(x + 4)$

$= x^3 + 4x^2$

$\frac{d(x^3 + 4x^2)}{dx} = 3x^2 + 8x$

135

$f(x) = (x^2 + 5)(x - 2)$

por D7:

$f'(x) =$ [ ]

↓

[ ]

$(x^2 + 5) \cdot \frac{d(x-2)}{dx} + (x-2) \cdot \frac{d(x^2+5)}{dx}$

$(x^2 + 5) \cdot 1 + (x - 2) \cdot 2x$

$x^2 + 5 + 2x^2 - 4x$

$3x^2 - 4x + 5$

136

$f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 3) =$ [ ]

Por D7:

$f'(x) =$ [ ]

↓

[ ]

$x^{\frac{1}{2}}(x^2 - 3)$

$x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(x^2-3)}{dx} + (x^2 - 3) \cdot \frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx}$

$x^{\frac{1}{2}} \cdot 2x + (x^2 - 3) \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$2x \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^2 - 3}{2x^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{4x^2 + x^2 - 3}{2x^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{5x^2 - 3}{2\sqrt{x}}$

7.4.3.7

Práctica adicional
de
derivación de un producto de funciones,
cuyas derivadas puedan ser
calculadas
por medio de las reglas estudiadas,
si se considera necesario.

137

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Por D8:

$f'(x) =$ [ ]

[ ]

$$\frac{(x-1)\cdot\frac{d(x^2)}{dx} - x^2\cdot\frac{d(x-1)}{dx}}{(x-1)^2}$$

$$\frac{(x-1)2x - x^2\cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{\mathbf{x^2 - 2x}}{\mathbf{(x-1)^2}}$$

138

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

por D8:

$f'(x) =$ [ ]

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\frac{(x^2+1)\cdot\frac{d(x^2-1)}{dx} - (x^2-1)\cdot\frac{d(x^2+1)}{dx}}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{(x^2+1)\cdot 2x - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{\cancel{2x^3} + 2x - \cancel{2x^3} + 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{\mathbf{4x}}{\mathbf{(x^2+1)^2}}$$

139

$$f(x) = \frac{a + x}{x - a}$$

$f'(x) =$ [ ]

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\frac{(x - a) \cdot \frac{d(a + x)}{dx} - (a + x) \cdot \frac{d(x - a)}{dx}}{(x - a)^2}$$

$$\frac{(x - a) \cdot 1 - (a + x) \cdot 1}{(x - a)^2}$$

$$\frac{x - a - (a + x)}{(x - a)^2}$$

$$\frac{\cancel{x} - a - a - \cancel{x}}{(x - a)^2}$$

$$-\frac{2a}{(x - a)^2}$$

140

$$f(\theta) = \frac{3\theta^2 + 5}{\theta^2}$$

$f'(\theta) =$ [ ]

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\frac{(3\theta^2 + 5) \cdot \frac{d(\theta^2)}{d\theta} - \theta^2 \cdot \frac{d(3\theta^2 + 5)}{d\theta}}{\theta^4}$$

$$\frac{(3\theta^2 + 5) \cdot 2\theta - \theta^2 \cdot 6\theta}{\theta^4}$$

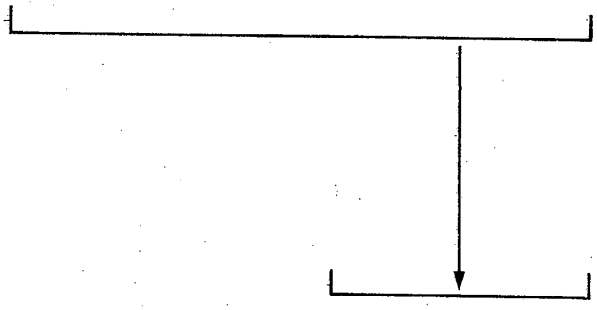
$$\frac{6\theta^3 + 10\theta - 6\theta^3}{\theta^4}$$

$$\frac{10\theta}{\theta^4}$$

$$\frac{10}{\theta^3}$$

141

$$f(t) = \frac{at^2 + b}{ct - d}$$

$f'(t) =$ 

$$\frac{(at^2 + b) \cdot c - (ct - d) \cdot 2at}{(ct - d)^2}$$

$$\frac{act^2 + bc - 2act^2 + 2adt}{(ct - d)^2}$$

$$\frac{-act^2 + 2adt + bc}{(ct - d)^2}$$

7.4.3.8

Práctica adicional
de
derivación de un cociente de funciones
cuyas derivadas pueden ser
calculadas por medio de las
reglas estudiadas,
si se considera necesario.

7.4.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *derivar* una función dada, mediante la aplicación de las reglas D1 a D8.

4.4

Derivada de una función compuesta

142

Sea $y = f(u)$

y $u = g(x)$

o bien $y = f[g(x)]$

143

$$y = f(u)$$

$$u = g(x)$$

$$y = (f \circ g)x = f[g(x)]$$

Podemos observar que:

- un incremento (Δx) en la variable x produce un incremento (Δu) en la función g
- este incremento Δu produce un incremento Δy en la función compuesta $f \circ g$

144

Entonces,

para $y = f(u)$

1. $y + \Delta y =$ ____

2. $\Delta y =$ ____

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} =$ ____

$f(u + \Delta u)$

$f(u + \Delta u) - f(u)$

$\dfrac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}$

145

Para

$u = g(x)$

1. $u + \Delta u =$ ____

2. $\Delta u =$ ____

3. $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} =$ ____

$g(x + \Delta x)$

$g(x + \Delta x) - g(x)$

$\dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$

146

Hemos encontrado:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}$$

y

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

luego:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$ ____

$\dfrac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$

147

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

4. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$

↑ puesto que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$

pero $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ [ ]

$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} =$ [ ]

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$ [ ]

por lo tanto: [ ]

- $\frac{dy}{dx}$
- $\frac{d[f(u)]}{du} = \frac{dy}{du}$
- $\frac{d[g(x)]}{dx} = \frac{du}{dx}$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

148

D9. $\frac{d(y)}{dx} = \frac{d(y)}{du} \cdot \frac{d(u)}{dx}$

o bien

$$(f \circ g)' x = f'(u) \cdot g'(x)$$

A esta expresión para la derivada de una función compuesta, se le conoce como:

la regla de la cadena.

149

$y = (3x + 2)^3$

Se requiere determinar $\frac{d(y)}{dx}$

Podemos considerar

$u = 3x + 2$

por lo tanto

$y = u^3$

entonces, por D9:

$\frac{d(y)}{dx} = \frac{d(y)}{du} \cdot \frac{d(u)}{dx} =$ [ ] [ ] = [ ]

$3u^2 \cdot 3 = 9u^2$

$= 9(3x + 2)^2$

150

Estudiar con atención este procedimiento.

$$y = (3x + 2)^3$$

$$\frac{d(y)}{dx} = 3(3x + 2)^2 \cdot \frac{d(3x + 2)}{dx}$$

$$= 3(3x + 2)^2 \cdot 3$$

$$= \mathbf{9(3x + 2)^2}$$

Sin hacer uso de la variable intermedia u.

151

$f(x) = (x^2 - 1)^2$

$f'(x) =$ ⌊_____⌋ . ⌊_____⌋

$=$ ⌊_____⌋

$$2(x^2 - 1) \cdot \frac{d(x^2 - 1)}{dx}$$

$$2(x^2 - 1) \cdot 2x$$

$$\mathbf{4x(x^2 - 1)}$$

152

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 8}$$

Expresión equivalente: $f(x) =$ ⌊_____⌋

$f'(x) =$ ⌊_____⌋ . ⌊_____⌋

$=$ ⌊_____⌋

$$(x^3 - 8)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}(x^3 - 8)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(x^3 - 8)}{dx}$$

$$\frac{1}{2}(x^3 - 8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^3 - 8}} \cdot 3x^2$$

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 8}}$$

153

Expresión equivalente

$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 1}$

$f(x) =$ ⌊ ⌋

$f'(x) =$ ⌊ ⌋ . ⌊ ⌋

$=$ ⌊ ⌋

$(3x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{1}{3}(3x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{d(3x^2 - 1)}{dx}$

$\frac{1}{3}(3x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \quad 6x$

$\frac{6x}{3\sqrt[3]{(3x^2 - 1)^2}}$

$\frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2 - 1)^2}}$

154

$f(x) = \sqrt{\frac{3x^2}{x - 1}}$

$f(x) =$ ⌊ ⌋ ⌊ ⌋

$f'(x) =$ ⌊ ⌋ . ⌊ ⌋

$=$ ⌊ ⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

- $\left(\frac{3x^2}{x - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{1}{2}\left(\frac{3x^2}{x - 1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(x - 1) \cdot 6x - 3x^2 \cdot 1}{(x - 1)^2}$
- $\frac{3x^2}{2\sqrt{x - 1}} \cdot \frac{6x^2 - 6x - 3x^2}{(x - 1)^2}$
- $\frac{3x^2}{2\sqrt{x - 1}} \cdot \frac{3x^2 - 6x}{(x - 1)^2}$
- $\frac{3x^2 \cdot 3x(x - 2)}{2\sqrt{(x - 1)^5}}$
- $\frac{9x^3(x - 2)}{2\sqrt{(x - 1)^5}}$

155

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$

$f(x) =$ ⌊ ⌋

$f'(x) =$ ⌊ ⌋ • ⌊ ⌋

⌊ ⌋

$(x^2 - 3x + 6)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}(x^2 - 3x + 6)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 3)$

$$\frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 6}}$$

7.4.4.1

Práctica adicional
de
derivación de funciones compuestas
de la forma
$f(x) = cu^n$
en que $u = g(x)$,
si se considera necesario.

156

$f(x) = x^3\sqrt{x^2 - 1}$

Expresión exponencial: $f(x) =$ ⌊ ⌋

Por D7: $f'(x) =$ ⌊ ⌋

⌊ ⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente

- $x^3 (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$
- $x^3 \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 3x^2$
- $\frac{x^4}{\sqrt{x^2 - 1}} + 3x^2\sqrt{x^2 - 1}$
- $\frac{x^4 + 3x^2(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}}$
- $\frac{x^4 + 3x^4 - 3x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$
- $\frac{4x^4 - 3x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

157

$f(x) = (x + 2)\sqrt{x^2 - 1}$

$f(x) =$ ⌊_____⌋

⌊_____⌋

↓

⌊_____⌋

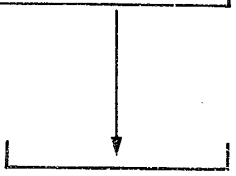
Respuesta en el cuadro siguiente

- $(x + 2)(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$
- $(x + 2) \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 1$
- $\frac{x(x + 2)}{2\sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x^2 - 1}$
- $\frac{x(x + 2) + 2(x^2 - 1)}{2\sqrt{x^2 - 1}}$
- $\frac{x^2 + 2x + 2x^2 - 2}{2\sqrt{x^2 - 1}}$
- $\frac{3x^2 + 2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 1}}$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$f(x) =$ _____

$f'(x) =$ _____



_____

Respuesta
en el
cuadro siguiente

- $\dfrac{x^2}{(x^2 - 4)^{1/2}}$

- $\dfrac{(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x - x^2 \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 4) \cdot 2x}{x^2 - 4}$

- $\dfrac{2x\sqrt{x^2 - 4} - x^3(x^2 - 4)}{x^2 - 4}$

7.4.4.2

Práctica adicional
de
derivación de un producto
o un cociente de funciones compuestas,
si se considera necesario.

7.4.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *derivar* una función compuesta dada, mediante la aplicación de la regla de la cadena;
- *derivar* un producto o un cociente de funciones compuestas.

4.5

Derivadas sucesivas

159

Hemos visto que:

si $y = f(x)$ **es una función,**

su derivada $y' = f'(x)$ es también una función.

Nada nos impide derivar nuevamente
esta función para obtener

$$y'' = f''(x)$$

que llamamos: la
segunda derivada de y con respecto a x.

160

La derivada de la segunda derivada
será la **tercera derivada** de la función original
y así sucesivamente.
Tomemos nota de este simbolismo.

Función original: $y = f(x)$

Primera derivada: $y' = f'(x) = \dfrac{d(y)}{dx}$

Segunda derivada: $y'' = f''(x) = \dfrac{d^2(y)}{dx^2}$

Tercera derivada: $y''' = f'''(x) = \dfrac{d^3(y)}{dx^3}$

etc.

161

Función original: $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x + 10$

Primera derivada: $f^{I}(x) =$ ⌊_____⌋

Segunda derivada: $f^{II}(x) =$ ⌊_____⌋

Tercera derivada: $f^{III}(x) =$ ⌊_____⌋

Cuarta derivada: $f^{IV}(x) =$ ⌊_____⌋

Quinta derivada: $f^{V}(x) =$ ⌊_____⌋

$4x^3 + 9x^2 - 10x + 2$

$12x^2 + 18x - 10$

$24x + 18$

24

0

162

$f(x) = \sqrt{4 + x^2}$

$f^{I}(x) =$ ⌊_____⌋

$f^{II}(x) =$ ⌊_____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

$$f(x) = (4 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f^{I}(x) = \frac{1}{2}(4 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$$

$$f^{II}(x) = \frac{(4 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{2}(4 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{4 + x^2} = \frac{(4 + x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{(4 + x^2)^{1/2}}}{4 + x^2} = \frac{\frac{4 + x^2 - x^2}{(4 + x^2)^{1/2}}}{4 + x^2}$$

$$= \frac{4}{(4 + x^2)^{3/2}} \qquad = \frac{4}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}$$

163

$$f(x) = \frac{a + bx}{a - bx}$$

$f^{I}(x) =$ [ ]

$f^{II}(x) =$ [ ]

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$f^{I}(x) = \frac{(a - bx)b - (a + bx)(-b)}{(a - bx)^2} = \frac{ab - b^2x + ab + b^2x}{(a - bx)^2}$$

$$= \frac{\mathbf{2ab}}{\mathbf{(a - bx)^2}}$$

$$f^{II}(x) = \frac{-2ab \cdot 2(a - bx) \cdot (-b)}{(a - bx)^4} = \frac{4ab^2(a - bx)}{(a - bx)^4}$$

$$= \frac{\mathbf{4ab^2}}{\mathbf{(a - bx)^3}}$$

7.4.5.1

Práctica adicional
de
determinación de las
derivadas sucesivas
de una función dada,
si se considera necesario.

7.4.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* las derivadas sucesivas de una función dada.

4.6

Derivación de funciones implícitas

164

Para las funciones que hemos estudiado hasta ahora, la ecuación definitoria ha sido expresada en la forma

$$y = f(x)$$

Decimos, en estos casos, que la función f está definida en forma **explícita**, o bien que está expresada **explícitamente** en términos de x.

165

Una función f puede estar expresada en forma **implícita** por una determinada ecuación, como en los siguientes casos:

1. $xy = 1$
2. $x^2 + y^2 = 25$
3. $y^2 + 3xy + x^2 + 5x - y = 0$
4. $y^5 - 3y^4 + x = x^3 + 5$

166

Es posible determinar la derivada de una función implícitamente definida:

- derivando uno a uno los términos que aparecen en la ecuación
- igualando las derivadas del primero y segundo miembro

y

- despejando la derivada buscada

167

Mucha atención.

Ejemplo 1.

Para la función: $xy = 1$

se requiere encontrar $\frac{d(y)}{dx}$

El primer miembro es un producto de dos funciones, digamos:

$$f(x) = x \quad e \quad y = g(x)$$

El segundo miembro es una constante.
Entonces, de acuerdo con D7 y D1: [ ]

Estudiar con atención.

$$x \cdot \frac{d(y)}{dx} + y \cdot 1 = 0$$

168

$$xy = 1$$

$$x \cdot \frac{d(y)}{dx} + y = 0$$

$$\frac{d(y)}{dx} = [\quad]$$

$$-\frac{y}{x}$$

169

Estudiar con atención el procedimiento completo:

$$xy = 1$$

$$x \cdot \frac{d(y)}{dx} + y = 0$$

$$\frac{d(y)}{dx} = -\frac{y}{x}$$

170

Ejemplo 2.

Dada la función

$$x^2 + y^2 = 25$$

se requiere $\frac{d(y)}{dx}$

$$\frac{d(y)}{dx} = \square$$

Por regla de la cadena

$$2x + 2y \cdot \frac{d(y)}{dx} = 0$$

$$\frac{d(y)}{dx} = -\frac{2x}{2y}$$

$$-\frac{x}{y}$$

171

Ejemplo 3.

$y^2 + 3xy + x^2 + 5x - y = 0$

$$\frac{d(y)}{dx} = \square$$

$$2y \cdot \frac{d(y)}{dx} + 3x \cdot \frac{d(y)}{dx} + y \cdot 3 + 2x + 5 - \frac{d(y)}{dx} = 0$$

$$(2y + 3x - 1)\frac{d(y)}{dx} + 3y + 2x - 5 = 0$$

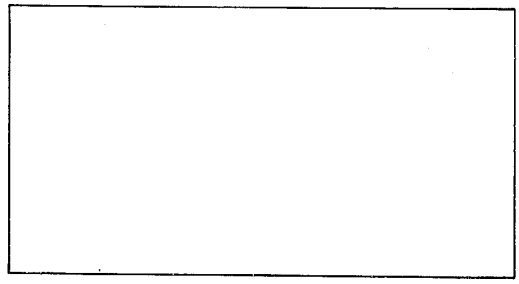
$$(2y + 3x - 1)\frac{d(y)}{dx} = -3y - 2x + 5$$

$$= \frac{-3x - 2x + 5}{2y + 3x - 1}$$

172

Ejemplo 4.

$$y^5 - 3y^4 + x = x^3 + 5$$



$$\frac{d(y)}{dx} = \square$$

$$5y^4 \cdot \frac{d(y)}{dx} - 12y^3 \cdot \frac{d(y)}{dx} + 1 = 3x^2$$

$$(5y^4 - 12y^3) \cdot \frac{d(y)}{dx} = 3x^2 - 1$$

$$\frac{3x^2 - 1}{5y^4 - 12y^3}$$

173

En algunos casos
la función
puede ser expresada explícitamente
despejando la variable dependiente.

Ejemplo 1.

La función f, definida implícitamente por

$$xy = 1$$

puede ser expresada explícitamente por medio
de la siguiente ecuación de la forma $y = f(x)$: $\square$

$$y = \frac{1}{x}$$

174

$$y = \frac{1}{x}$$

En esta forma,
derivamos en la forma usual:

$$\frac{d(y)}{dx} = \square$$

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{d(y)}{dx} = -x^{-2}$$

$$-\frac{1}{x^2}$$

175

Comparemos:

$xy = 1$ $\qquad$ $y = \frac{1}{x}$

Por derivación **implícita:**

$x \cdot \frac{d(y)}{dx} + y = 0$

$\frac{d(y)}{dx} = -\frac{y}{x}$

Sustituyendo $y = {}^1/_x$

$\frac{d(y)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

Por derivación **explícita:**

$\frac{d(y)}{dx} = -x^{-2}$

$-\frac{1}{x^2}$

176

Ejemplo 2.

Dada la ecuación:

$x^2 + y^2 = 25$

despejamos **y**:

$y =$ [ ]

$\sqrt{25 - x^2}$ (ó $-\sqrt{25 - x^2}$)

(Las dos funciones $y = \sqrt{25 - x^2}$ e $y = -\sqrt{25 - x^2}$ están representadas implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$.)

177

$y = \sqrt{25 - x^2}$ $\qquad$ $y = -\sqrt{25 - x^2}$

Derivar explícitamente:

$\frac{d(y)}{dx} =$ [ ] $\qquad$ $\frac{d(y)}{dx} =$ [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$\frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$

$-\frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$

- $-\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$

- $\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$

178

Comparando:

$x^2 + y^2 = 25$ $\qquad$ $y = \sqrt{25 - x^2}$

Derivación **implícita:** $\qquad$ Derivación **explícita:**

$2x + 2y \cdot \frac{d(y)}{dx} = 0$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$

$\frac{d(y)}{dx} = -\frac{x}{y}$ $\qquad$ $\frac{d(y)}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$

Sustituyendo $y = \sqrt{25 - x^2}$ → $\frac{d(y)}{dx} =$ ____

$y = -\sqrt{25 - x^2}$

Derivación **explícita:**

$-\frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$

$\frac{d(y)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$

Sustituyendo $y = -\sqrt{25 - x^2}$ → $\frac{d(y)}{dx} =$ ____

$-\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$

$\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$

179

Para la función del ejemplo 3, es posible aunque laboriosa, la transformación de la ecuación

$$y^2 + 3xy + x^2 + 5x - y = 0$$

en una o varias ecuaciones de la forma $y = f(x)$ que definan explícitamente otras tantas funciones.
Pero,
intentemos despejar la variable **y** de la ecuación del ejemplo 4

$$y^5 - 3y^4 + x = x^3 + 5$$

180

Aunque de la ecuación

$$y^5 - 3y^4 + x = x^3 + 5$$

nos es imposible despejar **y**
pueden existir una o varias funciones de la forma

$$y = f(x), \quad x \in D$$

que satisfagan la ecuación dada para toda $x \in D$.

D representa un dominio cualquiera.

7.4.6.1

Práctica adicional
de
derivación implícita,
si se considera necesario.

7.4.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* la derivada de una función implícitamente definida.

4.7

Derivabilidad

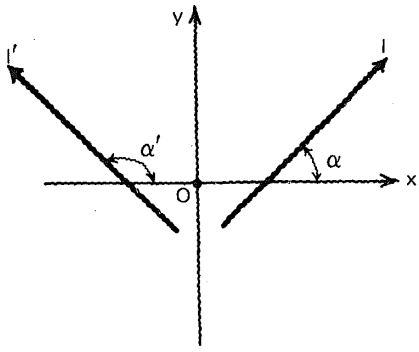
181

Hemos visto que:
la **primera derivada** $f'(x)$
de una función f
nos da la **pendiente**
de la recta tangente
a la curva correspondiente a f,
en un punto
de abscisa x.

182

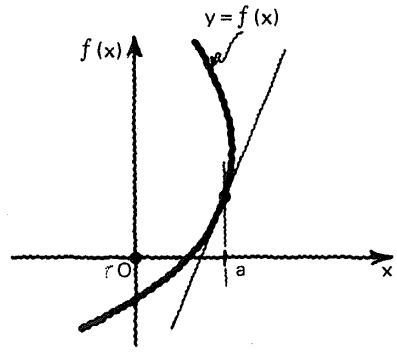
Recordemos que la
pendiente de una recta
es la tangente de
su ángulo de inclinación
es decir, el ángulo
formado por la recta
y el eje de las x
(o una paralela a éste)
y medido en sentido
contrario al de las
manecillas del reloj

$m = \tan \alpha$



183

$f'(a)$ es



la pendiente de la recta tangente a la curva f, en el punto de abscisa a

o bien, más brevemente:

la pendiente de la curva f en a.

184

Por ejemplo:
la pendiente de la curva

$$f(x) = x^3 - 5$$

en un punto cualquiera está dada por

$f'(x) = 3x^2$

185

La pendiente de la curva

$$f(x) = x^3 - 5$$

en un punto de abscisa 2, es igual a:

$f'(2) = 3(2)^2 = 12$

186

Una **ecuación de la recta tangente** a la curva f en el punto de abscisa 2 es:

En $f(x) = x^3 - 5$
si $x = 2$
$f(2) = 3$

Entonces, para la recta que pasa por (2, 3) con pendiente 12, podemos escribir:

$y - 3 = 12(x - 2)$

o

$y = 12x - 21$

o

$12x - y - 21 = 0$

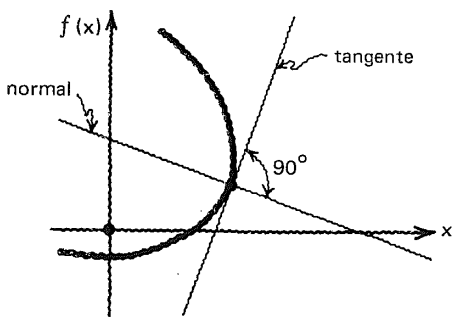
187

La medida del **ángulo de inclinación o ángulo de dirección** de la curva f en el punto de abscisa 2, es:

$\theta = \arctan 12 \doteq 85°14'$
para $0 \leqslant \theta < \pi$

188

Ahora bien, llamamos **recta normal** a la recta que pasa por el punto de tangencia y es perpendicular a la recta tangente.



189

Entonces,
una **ecuación de la recta normal**
a la curva f,
en el punto de abscisa 2,
es:

Puesto que, para un par de rectas perpendiculares con pendientes m_1 y m_2 se verifica que
$m_1 \cdot m_2 = -1$

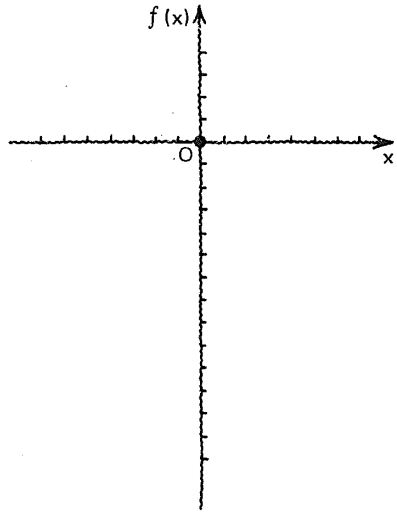
$$y - 3 = -\frac{1}{12}(x - 2)$$

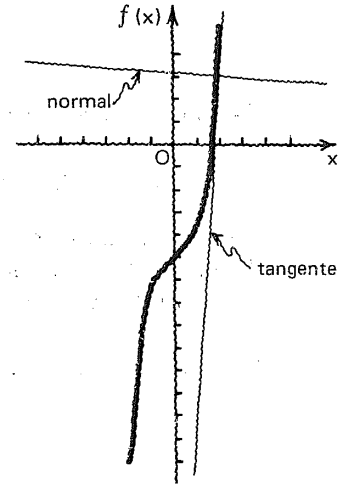
$$y = -\frac{x}{12} + \frac{19}{6}$$

● $x + 12y - 38 = 0$

190

Representación gráfica.





7.4.7.1

Práctica adicional
de
determinación de
— la pendiente
— una ecuación de la recta tangente
— una ecuación de la recta normal
— la medida del ángulo de dirección
en un cierto número a
para una función f dada,
si se considera necesario.

191

Consideremos, ahora,
algunas situaciones especiales
en relación con la pendiente de una
función.

192

Se tiene la función definida por

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

y se quiere determinar:
1. la pendiente de la curva f,
en un punto cualquiera

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

193

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

1. $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$

2. la pendiente de la curva f, en $x = 3$:

$$f'(3) = -\frac{(3)}{\sqrt{9 - (3)^2}} = -\frac{3}{0}$$

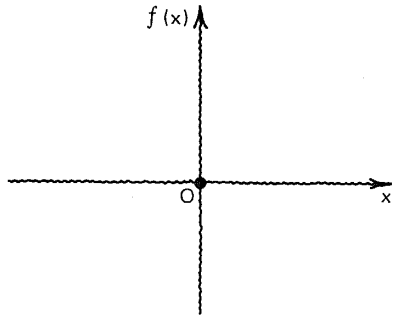
= número no definido

194

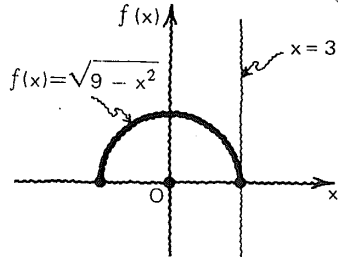
Decimos que la **función** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **no es derivable en** $x = 3$.

195

Veamos esto gráficamente.



Observaciones:



Para $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en $x = 3$

- la pendiente no está definida
- la recta tangente ($x = 3$) es paralela al eje $f(x)$,
- el ángulo de dirección mide 90°
- la recta normal $[f(x) = 0]$ es el eje Ox.

196

Sea la función f definida por

$$f(x) = x^{2/3}$$

1. Pendiente en un punto cualquiera

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^3}$$

197

$f(x) = x^{2/3}$

1. $f'(x) = \dfrac{2}{3x^3}$

2. Pendiente en $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{2}{3(0)^3} = \frac{2}{0}$$

= número no definido

198

$f(x) = x^{2/3}$

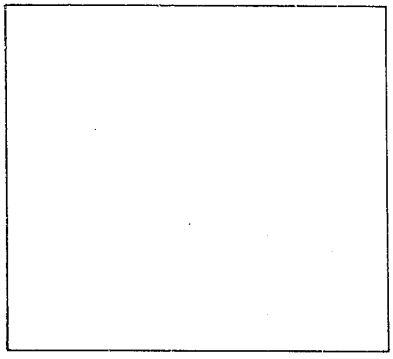
$f'(x) = \dfrac{2}{3x^3}$

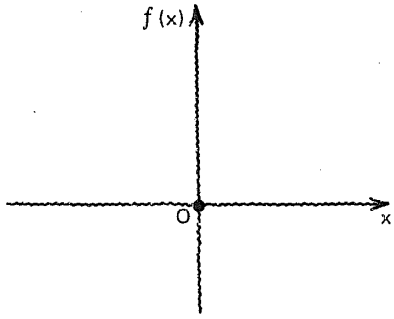
La derivada f no existe para $x = 0$,
o en otras palabras:
la función f no es derivable en $x = 0$.

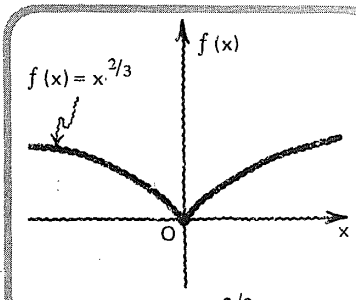
199

Gráficamente.

Observaciones:







Para $f(x) = x^{2/3}$ en $x = 0$:

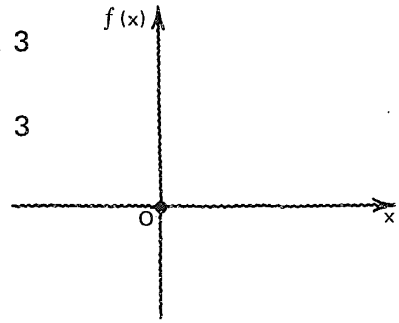
- la pendiente no está definida
- la recta tangente es el eje de las ordenadas
- el ángulo de dirección mide 90°
- la recta normal es el eje Ox

200

Sea la función f definida así:

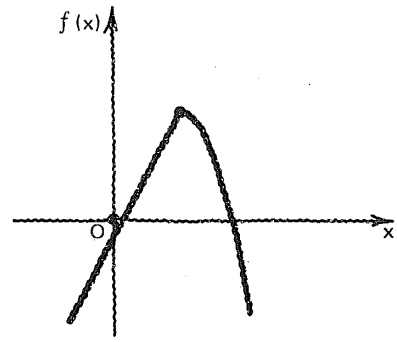
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 6x - 4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Dibujemos la gráfica de esta función.



Respuesta en el cuadro siguiente

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 6x - 4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$



Se requiere conocer:
la pendiente de f en $x = 3$.
Para ello necesitamos establecer los conceptos de **derivada por la derecha y derivada por la izquierda.**

201

Atención.

Derivada por la derecha.

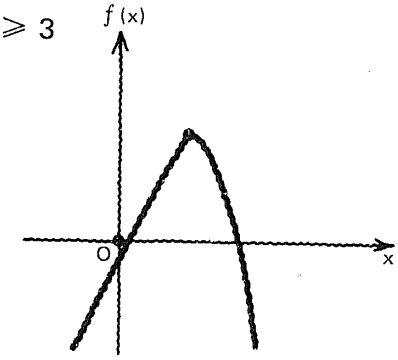
$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Derivada por la izquierda.

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

202

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 6x - 4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$



$f'(x) =$ ⌊_____⌋

Derivada por la derecha:

$f'_+(3) =$ ⌊_____⌋

Derivada por la izquierda:

$f'_+(3) =$ ⌊_____⌋

$f'(x) = 2$ si $x < 3$

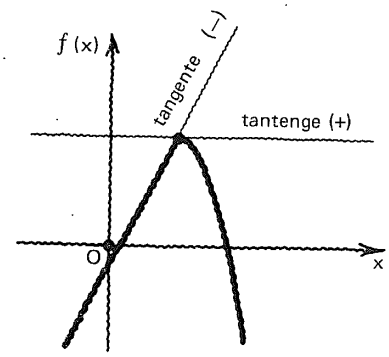
$f'(x) = -2x + 6$ si $x \geqslant 3$

$-2(3) + 6 = -6 + 6 = 0$

2

203

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 6x - 4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$



Para la función f,
existen en $x = 3$
la derivada por la derecha

$$f'_+(3) = 0$$

y la derivada por la izquierda

$$f'_-(3) = 2$$

sin embargo, decimos que: f **no es derivable en** $x = 3$

puesto que $f'_+(3) \neq f'_-(3)$.

7.4.7.2

Práctica adicional
de
determinación
de las condiciones de
derivabilidad de una función
en un número dado,
si se considera necesario.

204

Tomemos nota de este teorema
que relaciona la derivabilidad y la continuidad
de una función en un número dado.

Si *una función f es derivable en* **a**,
entonces *es continua en* **a**.

205

El recíproco del teorema anterior no se
cumple, es decir,

no siempre se verifica que { si *una función es continua en* **a** entonces es derivable en **a**.

206

Las funciones estudiadas

$f_1(x) = x^{2/3}$

y

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 6x - 4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

son continuas,

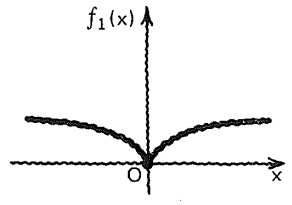
f_1 en $x = 0$

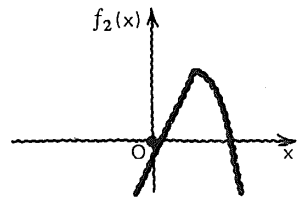
y

f_2 en $x = 3$

y sin embargo,

no son derivables en tales números.





7.4.7.3

Práctica adicional
de
determinación
de las
condiciones de
derivabilidad y continuidad
de una función
en un número dado,
si se considera necesario.

7.4.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar*
  - la pendiente
  - una ecuación de la recta tangente
  - una ecuación de la recta normal
  - la medida del ángulo de dirección de una función en un número dado;
- *dar* las condiciones de derivabilidad y continuidad de una función en un número dado.

4.8

Velocidad y aceleración instantáneas

207

Regresemos a nuestro problema inicialmente planteado, en que se requería conocer:

1. la velocidad instantánea
2. la aceleración instantánea

} al cabo de 5 segundos

de un cuerpo que se mueve de acuerdo con la ecuación

$$s = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + \frac{35t}{6} \qquad t \geqslant 0$$

3. el instante en que el cuerpo se encuentra a la distancia máxima del punto de partida tomado como punto de referencia.

208

Una expresión para la **velocidad en un instante cualquiera**, la obtenemos derivando la función

$$s = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + \frac{35t}{6}$$

$v = s' = f'(t) =$ [ ]

$$\frac{t^2}{2} - 4t + \frac{35}{6}$$

209

$$s = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + \frac{35t}{6} \qquad t \geqslant 0$$

$$v = \frac{t^2}{2} - 4t + \frac{35}{6} \qquad t \geqslant 0$$

Al cabo de 5 segundos de iniciado el movimiento, la velocidad instantánea es igual a:

[ ] m/seg.

$$f'(5) = \frac{(5)^2}{2} - 4(5) + \frac{35}{6}$$

$$\bullet = -\frac{5}{3}$$

(El signo — indica que al cabo de 5 segundos el cuerpo se encuentra moviéndose de derecha a izquierda, de acuerdo con lo convenido).

210

$$s = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + \frac{35t}{6}$$

$$v = \frac{t^2}{2} - 4t + \frac{35}{6}$$

Ahora,
siendo la **aceleración instantánea (a)** el cambio experimentado por la velocidad, por unidad de cambio en el tiempo, en un instante dado,

podemos escribir: $a = \frac{d(v)}{dt} =$ [ ]

$t - 4$

211

Estudiar con atención.

$t \geqslant 0$

Distancia dirigida del cuerpo al punto de partida, tomado como punto de referencia

$$s = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + \frac{35t}{6}$$

Velocidad instantánea:

$$v = \frac{d(s)}{dt} = \frac{t^2}{2} - 4t + \frac{35}{6}$$

Aceleración instantánea:

$$a = \frac{d(v)}{dt} = t - 4$$

212

Puesto que $a = \frac{d(v)}{dt}$

y $v = \frac{d(s)}{dt}$

$a = \frac{d^2(s)}{dt^2}$

En esta forma, la **velocidad** queda definida como la *primera derivada del espacio con respecto al tiempo*, y la **aceleración** como *la primera derivada de la velocidad con respecto al tiempo, o la* [ ] *derivada del espacio con respecto al tiempo.*

segunda

213

Al cabo de 5 segundos de iniciado el movimiento, la **aceleración instantánea** del cuerpo es igual a:

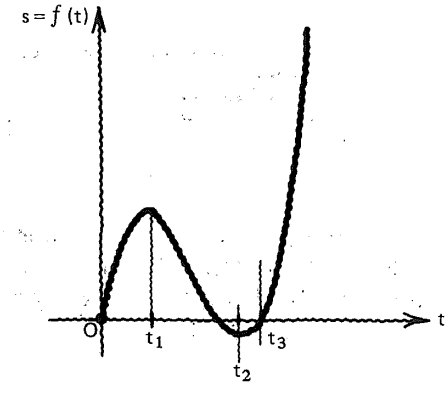
[ ] $\frac{\text{m/seg.}}{\text{seg.}}$

$f^{II}(5) = (5) - 4 = 1$

214

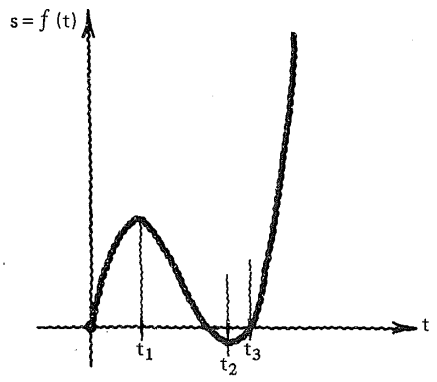
Esta es la gráfica de f, que nos permite ver que:

- existen dos instantes (1 y 2) en que el cuerpo se encuentra a mayor distancia del punto de referencia, en relación con otros instantes próximos y que:
- a partir de determinado instante (3) el cuerpo empieza a alejarse del punto de origen, sin regresar más.



215

Vemos que
la velocidad es nula para
los instantes 1 y 2.
Podemos determinar,
entonces,
los valores de t_1 y t_2,
igualando a cero
la expresión para v o $f'(t)$.
Hagámoslo.



$t_1 =$ ____

$t_2 =$ ____

$$v = \frac{t^2}{2} - 4t + \frac{35}{6} = 0$$

$$3t^2 - 24t + 35 = 0$$

$$t = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 420}}{6}$$

$$t = \frac{24 \pm 2\sqrt{39}}{6}$$

$$t = 4 \pm 2.0816659$$

$t_1 =$ **1.92** segs.

$t_2 =$ **6.08** segs.

216

Al cabo de aproximadamente 1.92 segundos el cuerpo se encuentra más alejado, hacia la derecha del punto de origen, en relación con otras posiciones vecinas.

Esta distancia "máxima positiva relativa" es igual a ____

Al cabo de aproximadamente 6.08 segundos, el cuerpo alcanza su mayor distancia, hacia la izquierda del origen.

Esta distancia "máxima negativa" es igual a ____

En $s = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + \frac{35t}{6}$

para t = 1.92

$s = 1.18 - 7.37 + 11.2 \doteq 5.01$

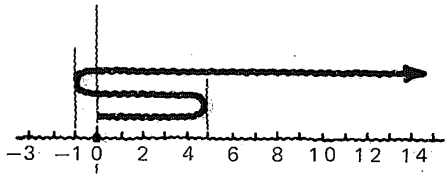
5.01 m aproximadamente

para t = 6.08

$s = 37.46 - 73.93 + 35.47 \doteq -1$

1 m aproximadamente

217



Para este móvil no hay una distancia máxima absoluta del cuerpo al punto de origen, ya que, a partir de determinado momento, el cuerpo se aleja sin límite.

7.4.8.1

Práctica adicional
de
resolución de problemas
de
razón instantánea de cambio,
si se considera necesario.

7.4.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* los conocimientos adquiridos de derivación de funciones algebraicas, a la resolución de problemas de movimiento, y otros relacionados con la noción de razón instantánea de cambio.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 2 de enero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO RIC KC 100